Komplexe Zahlen:

Arithmetische Darstellung: $z = a + bi \quad \mathrm{a = Realteil, b = Imaginärteil}; a,b \in R$

Gauß'sche Zahlenebene: $j = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad r = \sqrt{a^2 + b^2} \quad a = r \cdot \cos(j) \quad b = r \cdot \sin(j)$

Trigonometrische Darstellung: $z = r(\cos j + i \sin j)$

Exponentialform: $z = r \cdot e^{ij}$

daraus folgt: $e^{ij} = \cos j + \sin j$

Beziehungen in C: $z_1 = z_2 \Leftrightarrow a_1 = a_2 \text{ und } \mathrm{b}_1 = \mathrm{b}_2$

Addition/Subtraktion: $z_1 \pm z_2 = (a_1 \pm b_1 i) + (a_2 \pm b_2 i)$

Multiplikation: $z_1 \cdot z_2 = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 - b_1 a_2) i = r_1 r_2 \cdot e^{i(j_1 + j_2)}$

Division: $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 a_2 + b_1 b_2 + (b_1 a_2 - a_1 b_2) i}{{a_2}^2 - {b_2}^2} = \frac{r_1}{r_2} \cdot e^{i(j_1 - j_2)}$

Potenzieren: $z^n = r^n(\cos(j \cdot n) + i \cdot \sin(j \cdot n)) = r^n \cdot e^{i \cdot j \cdot n}$

Radizieren: $\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\left(\frac{j + 2kp}{n}\right) + i \cdot \sin\left(\frac{j + 2kp}{n}\right)\right) = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \frac{j}{n}}$

Quantoren:

Allquator: $\forall x \in M : x \text{ hat } E$ Existenzquator: $\exists x \in M : x \text{ hat } E$

Mengen:

Vereinigungsmenge: $M = M_1 \cup M_2 \Rightarrow M = \{m \mid m \in M_1 \vee m \in M_2\}$

Schnittmenge: $M = M_1 \cap M_2 \Rightarrow M = \{m \mid m \in M_1 \wedge m \in M_2\}$

Differenzmenge: $M = M_1 \setminus M_2 \Rightarrow M = \{m \mid m \in M_1 \wedge m \notin M_2\}$

disjunkte Menge: $M_1 \cap M_2 = \varnothing$

kartesisches Produkt: $M_1 \times \ldots \times M_n = \{(m_1, \ldots, m_n) \mid m_i \in A_i (1 \le i \le n)\}$

Potenzmenge: $P(A) = \{B \mid B \subseteq \mathrm{A}\}$, d.h. $P(A)$ ist die Menge aller Teilmengen von A

Mächtigkeit von Mengen:

gleichmächtig: es gibt eine bijektive Abbildung $f : X \to Y \quad |X| = |Y|$

endlich: es gibt ein n, so daß $|X| = |\{1, \ldots, n\}| = n$

abzählbar: X ist endlich oder es gilt $|X| = |\mathrm{N}| = \aleph_0$

Eigenschaften von Relationen:

Relation: $R \subseteq X \times X = \{(x, y) \mid x, y \in X\} \; X \neq \varnothing$

linkstotal:	$\Leftrightarrow \forall a \exists b : aRb$	**Bsp.** alle Eingaben *a* in ein System erzeugen eine Antwort *b*
rechtstotal: *(surjektiv)*	$\Leftrightarrow \forall b \exists a : aRb$	**Bsp.** für alle Datensätze *b* einer Datenbank gibt es einen Suchwert *a*
bitotal:	$\Leftrightarrow R$ ist links- und rechtstotal	
linkseindeutig: *(injektiv)*	$\Leftrightarrow \forall a, b, c : aRb \wedge cRb \Rightarrow a = c$	**Bsp.** wenn *a* und *c* die gleiche Matrikel-nummer *b* haben, muß *a* gleich *c* sein
rechtseindeutig:	$\Leftrightarrow \forall a, b, c : aRb \wedge aRc \Rightarrow b = c$	**Bsp.** eine bestimmte Eingabe *a* erzeugt immer eine bestimmte Ausgabe *b*
Funktion:	$R \subseteq A \times B$ ist linkstotal und rechtseindeutig	**Bsp.** jedem Element aus *A* wird ein Wert aus *B* eindeutig zugeordnet
partiell definierte Funktion:	$R \subseteq A \times B$ ist rechtseindeutig aber nicht linkstotal	**Bsp.** *f*(*a*) ist für ein Element *a* eindeutig bestimmt oder nicht definiert
eineindeutig: *(bijektiv)*	$\Leftrightarrow R$ ist Funktion, linkseindeutig und rechtstotal	*A* und *B* müssen gleich groß sein!

Klassifizierung von Relationen:

Äquivalenzrelation:	*reflexiv* $xRx \Leftrightarrow \forall x \in X$	*symmetrisch* für $\forall x, \forall y \in R$ aus $xRy \Rightarrow yRx$	*transitiv* aus xRy und $yRz \Rightarrow xRz$
Halbordnung:	*reflexiv* $xRx \Leftrightarrow \forall x \in X$	*antisymmetrisch* aus xRy und $yRx \Rightarrow x = y$	*transitiv* aus xRy und $yRz \Rightarrow xRz$
Ordung:	*irreflexiv* kein $x \in R$ für das xRx	*transitiv* aus xRy und $yRz \Rightarrow xRz$	*connex* xRy oder yRx oder x = y

Äquivalenzklasse: $[x]_R = \{y \in X \mid (x,y) \in R\}$ Quotientenmenge: $X / R = \{[x]_R \mid x \in X\}$

Bild und Urbild einer Abbildung:

Bild: für die Teilmenge $A \subset X$ heißt $f(a) = \{f(x) : x \in A\}$ das Bild von A unter f

Urbild: für die Teilmenge $B \subset Y$ heißt $f^{-1}(B) = \{x \in X : f(x) \in B\}$ das Urbild von B unter f

injektiv: f heißt injektiv, wenn gilt : $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$ (Eindeutigkeit) (auch linkseindeutig)

surjektiv: f heißt surjektiv, wenn gilt : $f(X) = Y$, d.h. $\forall x \in X$ gibt es ein $y \in Y$ (auch rechtstotal)

bijektiv f heißt bijektiv, wenn f sowohl *surjektiv* als auch *injektiv* ist (Eineindeutigkeit)

Algebraische Strukturen:

Halbgruppe:
- Abgeschlossenheit der Struktur $\forall x,y \in M : x * y \in M$
- assoziativ : $\forall x,y,z \in M : x * (y * z) = (x * y) * z$

Monoid:
- Abgeschlossenheit, assoziativ
- es gibt ein Neutrales Element (Einselement) $e \in M : \forall x \in M : e * x = x * e = x$

Gruppe:
- Abgeschlossenheit, assoziativ, neutrales Element
- für jedes Element aus M gibt es ein Inverses $\bar{x} \in M$ zu $x \in M : \bar{x} * x = x * \bar{x} = e$

Abelsche Gruppe: - kommutative Gruppe $\forall x, y \in M : x * y = y * x$

Modul: - additiv geschriebene Abelsche Gruppe

Homomorphismus:
- relationstreu $f(x) f(R) f(y) \Leftrightarrow xRy \;\; \forall x, y \in S, \forall R \in$ Rela
- operationstreu $f(x * y) = f(x) f(*) f(y) \;\; \forall x, y \in S, \forall * \in$ Oper
- surjektive Strukturabbildung

Isomorphismus:
- relationstreu $f(x) f(R) f(y) \Leftrightarrow xRy \;\; \forall x, y \in S, \forall R \in$ Rela
- operationstreu $f(x * y) = f(x) f(*) f(y) \;\; \forall x, y \in S, \forall * \in$ Oper
- bijektive Strukturabbildung

Ringe/Körper:
- Struktur $(R,+,\cdot) : (R,+)$ ist Modul und $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z \wedge (y + z) \cdot x = y \cdot x + z \cdot x$ gilt.
- $(R,\cdot)$ ist Halbgruppe $\Rightarrow$ Ring
- $(R,\cdot)$ ist Monoid $\Rightarrow$ Ring mit Einselement
- $(R,\cdot)$ ist kommutativ $\Rightarrow$ kommutativer Ring
- $(R \setminus \{\text{neutrales Element}\}, \cdot)$ ist kommutative Gruppe $\Rightarrow$ Körper

Unterstrukturen:
- Unterhalbgruppen : $(U,\circ)$ und $(H,\circ)$ sind Halbgruppen; $U \subseteq H; \forall u,v \in U : u \circ v \in U$
- Untergruppen : $(U,\circ)$ und $(G,\circ)$ sind Gruppen; $U \subseteq G; \forall u,v \in U : u \circ v^{-1} \in U$
- Unterring : $(U,+,\cdot)$ und $(R,+,\cdot)$ sind Ringe; $U \subseteq K; (U,+), (U,\cdot)$: Nachweis Unter(halb)gruppe
- Unterkörper : $(U,+,\cdot)$ und $(K,+,\cdot)$ sind Körper; $U \subseteq K (U,+), (U,\cdot)$: Nachweis Untergruppe

Ideal: $(I,+,\cdot)$ ist Ideal von $(M,+,\cdot) : (I,+)$ Untergruppe von $(M,+)$ und $\forall x \in M : x \cdot I \subseteq I \wedge I \cdot x \subseteq I$

Kongruenzklasse: $xRy \Leftrightarrow x + I = y + I : [y]_R = \{x \mid xRy\} = \{x \mid x + I = y + I\}$

Nullelement: - $o \in M, \forall x \in M : o * x = x * o = o$

Nullteiler: - $x \neq 0, y \neq 0 \in M : x * y = y * x = o$ [niemals in Gruppen!]

Permutationen:

Permutation: $f : N \to N$

Zyklen: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 5 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (135)(24)$

Signum: $\operatorname{sgn}(p) = -1^{m_1 + m_2 + \ldots + m_j - j}$; $m_1, \ldots m_j$ = Anzahl der Elemente eines Zyklus

Erzeugendensystem: Untermenge der Menge U, die durch Verknüpfung die Menge U bildet

Matrizen:

Matrix:

$$A=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}=\left(a_{i,j}\right)_{m\times n} \text{ mit } a_{i,j}\in K \quad (1\le i\le m, 1\le j\le n) \quad K \text{ ist Körper}$$

Einheitsmatrix:

$$E_n=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Diagonalmatrix:

$$diag(a_1,a_2,\ldots,a_n)=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$

Nullmatrix:

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

obere Dreiecksgestalt: (analog untere)

$$\begin{pmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & * \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{pmatrix}$$

Rechnen mit Matrizen:

Gleichheit: $A=\left(a_{i,j}\right)_{m\times n}=\left(b_{k,l}\right)_{r\times p}=B \Leftrightarrow m=r \wedge n=p \wedge a_{i,j}=b_{k,l}$ für $1\le i\le m$ und $1\le j\le n$

Addition: $A+B=\left(a_{i,j}+b_{i,j}\right)_{m\times n}$ und $A-B=\left(a_{i,j}-b_{i,j}\right)_{m\times n}$

Skalarmultiplikation: $l\ A=\left(l\ a_{i,j}\right)_{m\times n}$

Matrizen-multiplikation: (nicht kommutativ!)

$$AB=\left(a_{i,j}\right)_{m\times n}\left(b_{k,l}\right)_{n\times p}=\begin{pmatrix} a_{1,1}b_{1,1}+\ldots+a_{1,n}b_{n,1} & \cdots & a_{1,1}b_{1,p}+\ldots+a_{1,n}b_{n,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}b_{1,1}+\ldots+a_{1,n}b_{n,1} & \cdots & a_{m,1}b_{1,p}+\ldots+a_{m,n}b_{n,p} \end{pmatrix}$$

transponierte Matrix: $A^T=\left(a'_{i,j}\right)_{n\times m}$ mit $a'_{i,j}=a_{j,i}$ es gilt: $(A+B)^T=A^T+B^T \quad (a\,A)^T=a\,A^T \quad \left(A^T\right)^T=A$

Inverse Matrix: gilt nur für $A\in K^{n\times n}: AA^{-1}=A^{-1}A=E$

Rang einer Matrix: Zahl der linear unabhängigen Vektoren einer Matrix (Zeilenrang = Spaltenrang = $\mathrm{rg}(A_n)$)

$\mathrm{rg}(A_n)=n$: Vektoren sind linear unabhängig $\quad \mathrm{rg}(A_n)<n$: Vektoren sind linear abhängig
$\mathrm{rg}(A_n)\neq \mathrm{rg}(A_n{}'b) \Rightarrow$ Gleichungssystem hat keine Lösung
$\mathrm{rg}(A_n)=\mathrm{rg}(A_n{}'b) \Rightarrow \mathrm{rg}(A_n)=n$: eine Lösung bzw. $\mathrm{rg}(A_n)<n$: mehrere Lösungen

Determinante: Produkt der Halbdiagonalelemente einer Dreiecksmatrix (nur bei $K^{n\times n}$)

- Dreiecksmatrix konstruieren (GAUSS) und Halbdiagonalelemente multiplizieren
- pivotisieren der Hauptiagonalelemente (AUSTAUSCH)
- Entwicklungssatz

$\det(A_n)\neq 0$: linear unabhängig, d.h. eindeutige Lösung des Gleichungssystems; $\mathrm{rg}(A_n)=n$
$\det(A_n)=0$: linear abhängig, d.h. Lösung bildet Gerade oder Fläche; $\mathrm{rg}(A_n)<n$

Entwicklungssatz: Matrizen größer als $K^{2\times 2}$ werden in $K^{2\times 2}$ - Matrizen umgewandelt $\quad \det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=ad-bc$

Regel von Sarrus:

$$\text{gilt für } K^{3\times 3}: \det\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}=\begin{array}{l} a_{1,1}a_{2,2}a_{3,3}+a_{1,2}a_{2,3}a_{3,1}+a_{1,3}a_{2,1}a_{3,2} \\ -a_{1,1}a_{2,3}a_{3,2}-a_{1,2}a_{2,1}a_{3,3}-a_{1,3}a_{2,2}a_{3,1} \end{array}$$

Dimension: $\dim(A)=n-\mathrm{rg}(A)$

Kern: Urbild des Nullvektors: $\ker(j)=\{x\in R^n \mid A\vec{x}=\vec{o}\} \quad j: R^m \mapsto R^n \quad j(A)=A\vec{x}=\vec{y}$

Eigenwert einer Matrix: (bei $A=A^T$ reel)

$$A\cdot\vec{v}=l\cdot\vec{v} \Leftrightarrow (A-l\cdot E)\cdot\vec{v}=0: \det(A-l\cdot E)=\det\begin{pmatrix} a_{1,1}-l & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2}-l & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n}-l \end{pmatrix}=0$$

AUSTAUSCH:

$$NE=AE-\frac{APS\ APZ}{APE} \quad NPZ=\frac{APZ}{APE} \quad NPS=\frac{APS}{APE}$$

Graphentheorie:

Graph:

endliche Struktur : $G = (V, R_u, R_g)$

V : Menge der Knoten
R_u : Relation ungerichteter Kanten
R_g : Relation gerichteter Kanten

schlichter Graph : – keine Schlingen und keine doppelten Kanten

Adjazenzmatrix:

$A = (a_{i,j})$ $\quad a_{i,j}$ = Anzahl der Kanten zwischen Knoten i und j

keine Schlinge : $a_{i,i} = 0$ $\quad$ Schlinge : $a_{i,i} = 2$

Isomorphie:

identische Adjazenzmatrizen (Zeilen-, Spaltenvertauschungen möglich)

Analysis:

Folgen:

Zahlenfolge : $f : N \to R \quad (a_n) : f(n) = a_n$ $\quad$ Funktion : $\left.\begin{matrix} f : R \to R \\ f : R^n \to R \end{matrix}\right\} f(x) = y$

Permutation : $f : N \to N$

Konvergenz und Divergenz:

kovergent : $|a_k - a| \le e \quad \Leftrightarrow \quad \lim\limits_{n\to\infty} a_k = a$

divergent : Funktion oder Folge ist nicht konvergent

bestimmt divergent : $\lim\limits_{n\to\infty} a_k = \infty$

unbestimmt divergent : keine klare Aussage möglich

Konvergenzkriterien:
(Ränder betrachten!)

$$\left.\begin{matrix} \text{Quotientenkriterium :} \quad \lim\limits_{n\to\infty} \left| \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \right| = g \\ \\ \text{Wurzelkriterium :} \quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = g \end{matrix}\right\} \begin{matrix} g < 1 \Rightarrow \text{konvergent} \\ g > 1 \Rightarrow \text{divergent} \\ g = 1 \Rightarrow \text{keine Aussage mögl., weiter betrachten!} \end{matrix}$$

Leipnitzkriterium :

Majorantenkriterium : $\|a_n\| \le L \cdot \|c_n\| \quad \forall n \ge n_0 \quad c_n$ ist Nullfolge $\quad L > 0$

Monotonie:

monoton wachsend : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$ $\quad$ streng monoton wachsend : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} > 1$

monoton fallend : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$ $\quad$ streng monoton fallend : $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} < 1$

Grenzwert:

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a \quad \Leftrightarrow \quad$ für $e > 0$ existiert ein $d(e, x_0) : \|f(x) - a\| \le e$, falls $\|x - x_0\| \le d(e, x_0)$

linksseitiger Grenzwert : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x) = a$ $\quad$ rechtsseitiger Grenzwert : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x) = a$

uneigentlicher Grenzwert : $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \pm\infty$

bestimmte Grenzwerte:

$\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n = e$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{P_n(x)}{a^n} = 0$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$ $\quad \lim\limits_{n\to 0} \left(\dfrac{\sin n}{n}\right) = 1$

$\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n^a} = 0$, $a > 0$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n}\right)^n = \dfrac{1}{e}$ $\quad \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$ $\quad \lim\limits_{n\to 0} \left(n \cdot \sin\dfrac{1}{n}\right) = 1$

Stetigkeit:

stetig : $\lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x<x_0}} f(x_0) = \lim\limits_{\substack{x\to x_0 \\ x>x_0}} f(x_0) = f(x_0)$

Lücke : $g_r = g_l$, kein $f(x_0)$ $\quad$ Sprung : $g_r \ne g_l$

Polstelle : g_r oder $g_l = \pm\infty$ $\quad$ osz.Unstetigkeitsstelle : g_r, g_l ex. nicht

Taylor-Polynom:
(näherungsweise Darstellung einer Funktion)

$$P_n(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0)^1 + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^n(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

$$f(x) = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k}_{P_n(x)} + \underbrace{\frac{f^{(n+1)}(x_0 + J)(x - x_0)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}}_{=R_n(x)} \quad 0 < J < 1$$

Differential-/Integralrechnung:

spez. Ableitungen:

$f(x)$	$f'(x)$	$f''(x)$
a	0	0
x^n	nx^{n-1}	$n(n-1)x^{n-2}$
$\sin x$	$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1+\tan^2 x$	$2\tan x \cdot (1+\tan^2 x)$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$
$\arccos x$	$\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{-x}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{-2x}{(1+x^2)^2}$
a^x	$a^x \ln x$	$a^x (\ln x)^2$
e^x	e^x	e^x
$\log_a x$	$\frac{1}{x \cdot \ln a}$	$\frac{-1}{x^2 \cdot \ln a}$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{-1}{x^2}$

spez. Integrale:

$\int 0 \,\mathrm{dx} = C$ $\quad \int a \,\mathrm{dx} = a \cdot x + C$ $\quad \int x^n \,\mathrm{dx} = \frac{1}{\mathrm{n}+1} x^{n+1} + C$

$\int \frac{1}{x} \,\mathrm{dx} = \ln|x| + C$

Beweise:

Induktiver Beweis:
Beh.: Die Aussage $A(n)$ gilt für alle natürlichen Zahlen n mit $n \geq n_0$
Bew.: Ind.Anfang: $\mathrm{A}(\mathrm{n}_0)$ ist richtig
Ind.Vorraussetzung: $A(n)$ gelte für $n \in N$ mit $n \geq n_0$
Ind.Schluß: $A(n) \Rightarrow A(n+1)$

Indirekter Beweis:
Beh.: $A \Rightarrow B$
Bew.: Annahme $\neg(A \Rightarrow B)$ würde gelten, d.h. es gilt $(A \wedge \neg B)$
Diese Aussage führt man auf einen Widerspruch

Direkter Beweis: B aus A hergeleitet
- Ersetzen von A durch die Definition
- Umformung von A in erlaubter Weise

Winkelfunktionen:

$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

$\sin(a+b) = \cos(a)\sin(b) + \sin(a)\cos(b)$

	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin(x)$	$\sqrt{0}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{4}/2$
$\cos(x)$	$\sqrt{4}/2$	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{1}/2$	$\sqrt{0}/2$
$\tan(x)$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	n.d.

Logische Umformungen:

Kontraposition: $(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

Doppelte Verneinung: $\neg(\neg A) \Leftrightarrow A$

Indirekter Beweis: $\neg(A \Rightarrow B) \Leftrightarrow (A \Rightarrow (\neg B))$

$\neg(\forall x \in M : x \text{ hat } E) \Leftrightarrow (\exists x \in M : \neg(x \text{ hat } E))$

$\neg(\exists x \in M : x \text{ hat } E) \Leftrightarrow (\forall x \in M : \neg(x \text{ hat } E))$

Kommutativität:	$A \wedge B \Leftrightarrow B \wedge A$	$A \vee B \Leftrightarrow B \vee A$
Assoziativität:	$A \wedge (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \wedge C$	$A \vee (B \vee C) \Leftrightarrow (A \vee B) \vee C$
Distributivität:	$A \wedge (B \vee C) \Leftrightarrow (A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	$A \vee (B \wedge C) \Leftrightarrow (A \vee B) \wedge (A \vee C)$
deMorgan:	$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B)$	$\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$

Stochastik:

zufälliges Ereignis:	- Ergebnis eines zufälligen Versuchs $A = Pot(\Omega)$
elementares Ereignis:	- prinzipiell mögliches Ereignis
sicheres Ereignis:	- $\Omega \in A$
σ-Algebra:	- $(A, \cup, \cap)$ $\cup$: Summe von Ereignissen $\cap$: Produkt von Ereignissen
Zufallsgröße:	- Funktion die jedem Elementarereignis eine reelle Zahl zuordnet - muss messbar sein
Wahrscheinlichkeit:	- Funktion die zufälligen Ereignissen eine reelle Zahl zwischen 0 und 1 zuordnet - $P\left(\bigcup_{i=1}^{n} E_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(E_i) \quad A_i \cap A_j = \emptyset \quad i \neq j$ - sicheres Ereignis: $1 = P(\Omega)$ - $P(A_1 \cup A_2) = P(A_1) + P(A_2) - P(A_1 \cap A_2) \qquad P(A_1 \cap A_2) = P(A_1) \cdot P_{A_1}(A_2)$ - $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
Verteilungsfunktion:	- $F_X(t) = P(X < t) \quad -\infty \le t \le \infty \quad 0 \le F_X(t) \le 1 \quad \lim_{t \to -\infty} F_X(t) = 0 \quad \lim_{t \to \infty} F_X(t) = 1$ - $P(t_1 \le X < t_2) = F_X(t_2) - F_X(t_1)$
Varianz:	- $s^2 = V(X)^2 = E\left((X - E(X))^2\right)$
Zuverlässigkeitsfunktion:	- $R_X(x) = 1 - P(X < x) = 1 - F_X(x)$
Konfidenzintervall:	- $P(\hat{p} - d_1 \le p \le \hat{p} + d_2) = 1 - a$

	diskrete Zufallsgrößen:	***stetige Zufallsgrößen:***
Beschreibung:	- abzählbar viele Werte - linksseitig stetige Treppenfunktion	- überabzählbar viele Werte - stetige Funktion
Wahrscheinlichkeit:	- Einzelwahrscheinlichkeit: p_i $p_i = P(X = x_i) \quad (i = 1,2,...)$ $\sum_{i=1}^{\infty} p_i = 1 \qquad 0 \le p_i \le 1$	- Dichtefunktion: $f_X(x)$ $\int_{x}^{x+dx} f_X(x)dx = P(x \le X < x + dx)$ $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1 \quad f_X(x) \ge 0$
Verteilungsfunktion:	$F_X(t) = \sum_{\substack{i \\ x_i < t}} p_i \quad P(t_1 \le X < t_2) = \sum_{\substack{i \\ t_1 \le x_i < t_2}} p_i$ $p_i = \lim_{h \to +0} F_X(x_i + h) - F_X(x_i)$	$F_X(t) = \int_{-\infty}^{t} f_X(x)dx \quad P(t_1 \le X < t_2) = \int_{t_1}^{t_2} f_X(x)dx$ $f_X(x) = F'_X(x)$
Erwartungswert:	$m = E(X) = \sum_i x_i p_i$	$m = E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x)dx$
Varianz:	$s^2(X) = V(X)^2 = \sum_i (x_i - E(X))^2 \cdot p_i$	$s^2(X) = V(X)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E(X))^2 \cdot f_X(x)dx$

Verteilungen:

Binomialverteilung:	$B(n, p)$	Anzahl der zum Ausschuss gehörenden Einzelstücke einer Stichprobe
Null-Eins-Verteilung:	$B(n, p) \quad n = 1$	Einmalige Stichprobe
Poissonverteilung:	$Poi(l)$	radioaktiver Zerfall; Anzahl von Kunden, die in einer Zeitperiode auf eine Bedienung warten
Hypergeometrische Verteilung:	$Hy(N, M, n)$	Anzahl defekter Bauteile, Anzahl von Platzwechseln
Exponentialverteilung:	$Exp(l)$	Reparaturdauer, Zerfallszeit
Normalverteilung:	$N(m, s)$	Versuche, Messfehler
Standardnormalverteilung:	$N(0,1)$	Standardisierung mit: $y = \frac{x - m}{s}$

diskrete Verteilungen:

	Parameter:	*Einzelwahrscheinlichkeit:*	*Erwartungswert:*	*Varianz:*
Binomial-verteilung:	$n = 1,2,\dots$ $0 < p < 1$	$P(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$	$E(X) = np$	$s^2(X) = np(1-p)$
	n = Anzahl der Geprüften	p = Wahrscheinlickeit des Ereignises		k = Häufigkeit des Ereignises
Poisson-verteilung:	$l > 0$	$P(X = k) = \frac{l^k}{k!} e^{-l}$	$E(X) = l$	$s^2(X) = l$
Hypergeome-trische Ver-teilung:	$N = 1,2,\dots$ $M = 1,2,\dots,N$ $n = 1,2,\dots,N$	$P(X = k) = \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}}$	$E(X) = n\frac{M}{N}$	$s^2(X) = n\frac{M}{N}\left(1-\frac{M}{N}\right)\frac{N-n}{N-1}$

n = Anzahl der Geprüften $\quad k$ = Anzahl der Geprüften mit Eigenschaft X

N = Gesamtanzahl $\quad M$ = Gesamtanzahl mit Eigenschaft X

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1)}{k!}$$

stetige Verteilungen:

	Parameter:	*Einzelwahrscheinlichkeit:*	*Erwartungswert:*	*Varianz:*
Exponential-verteilung:	$l > 0$	$f_X(x) = \begin{cases} l \cdot e^{-l \cdot x} & x \geq 0 \\ 0 & sonst \end{cases}$	$E(X) = \frac{1}{l}$	$s^2(X) = \frac{1}{l^2}$
Normalverteilung:	$-\infty < m < \infty$ $0 < s$	$f_{m,s}(x) = \frac{1}{s\sqrt{2p}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2s^2}}$	$E(X) = m$	$s^2(X) = s^2$

Statistischer Test:

1. Aufstellen einer Null-/Alternativhypothese H_0 und Wahl der Irrtumswahrscheinlichkeit
2. Wahl einer geeigneten Prüfgröße $U = U(Stichprobe)$ mit bekannter Verteilung
3. Ermittlung eines kritischen Bereichs K aus $P\left(U \in K_{H_0}\right) = a$

   zweiseitige Fragestellung: $P\left(|U| \geq u_{a/2}\right) = a$ einseitige Fragestellung: $P\left(U \geq u_{a/2}\right) = a$
4. Berechnung der Prüfgröße U anhand der konkreten Stichprobe
5. Entscheidung: $U \in K \Rightarrow H_0$ wird abgelehnt; $U \notin K \Rightarrow H_0$ wird *nicht* abgelehnt

Numerik:

absoluter Fehler: $\Delta x = \tilde{x} - x \quad x$ = realer Wert $\quad \tilde{x}$ = Eingabewert

relativer Fehler: $e^x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{\tilde{x} - x}{x} \qquad z(x,y) = x \circ y : e^z = c_x e^x + c_y e^y$

Berechnung des Interpolationspolynoms:

Interpolation:
$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

Lagrange:
$$P_n(x) = \sum_{i=0}^{n} f(x_i) \cdot L_i(x) \qquad L_i(x) = \prod_{\substack{k=0 \\ k \neq 1}}^{n} \frac{x - x_k}{x_i - x_k}$$

Newton:
$$P_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_2(x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_{n-1})$$
$$a_i = f_{i,i} \quad f_{i,0} = f(x_i) \quad f_{i,x} = \frac{f_{i,k-1} - f_{i-1,k-1}}{x_i - x_k}$$

Neville:
$$f(\tilde{x}) = P_n(\tilde{x}) = p_{n,n} \quad P_{i,0} = y_i \quad P_{i,j}(\tilde{x}) = \frac{P_{i,j-1} - P_{i-1,j-1}}{x_i - x_{i-j}}(\tilde{x} - x_i)$$

Matrix-Zerlegungen:

Cholesky:

$$A = G^T G \quad g_{i,i} = \sqrt{a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{k,i}^{\ 2}} \quad g_{i,j} = \frac{1}{g_{i,i}} \cdot \left(a_{i,j} - \sum_{k=1}^{i-1} g_{k,i} \cdot g_{k,j} \right)$$

Householder:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

Konstruktion einer Folge von Matrizen $A^{(k)} = p_k \cdot A^{(k-1)}$ aus $A^{(0)} = A$ bis $A^{(k)}$ Dreiecksform hat; mit $p_k = E - a_k \cdot \vec{u}^{(k)} \cdot \left(\vec{u}^{(k)}\right)^T$, $\vec{u}^{(k)} = \vec{A}_1^{(k)} - r_k \cdot \vec{e}_1$, $\vec{A}_1^{(k)}$ ist der erste Spaltenvektor von $A^{(k)}$) und $a_k = \frac{2}{\left\|\vec{u}^{(k)}\right\|^2}$, wobei $r_k = \begin{cases} \operatorname{sgn} a_1^{(k)} \cdot \left\|\vec{A}_1^{(k)}\right\| & a_1^{(k)} \neq 0 \\ \left\|\vec{A}_1^{(k)}\right\| & a_1^{(k)} = 0 \end{cases}$

LU-Zerlegung:

$$A \cdot \vec{x} = \vec{b} \quad A = L \cdot U \quad L \cdot U \cdot \vec{x} = \vec{b}$$

1. $U \cdot \vec{x} = \vec{y}$ löse $L \cdot \vec{y} = \vec{b}$
2. Löse $U \cdot \vec{x} = \vec{y}$

Lineare Optimierung

Simplexmethode:

$$z = \vec{c}^{\,T} \vec{x} = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i \quad \Rightarrow \quad \text{minimieren bzw. maximieren}$$

$$A\vec{x} \le \vec{b} \quad \text{oder} \quad A\vec{x} \ge \vec{b} \quad \text{mit} \quad \vec{x} \ge 0$$

1. Startlösung (erste zulässige Basislösung)
   a. $z \to \max$ bzw. $z \to \min : z^* = -z \to \max$
   b. Nichtnegativitätsbedingung: $\vec{x} \ge 0$, bei beliebigen $x_i : x_i = x_i^{*} - x_i^{**} \quad x_i^{*}, x_i^{**} \ge 0$
   c. Gleichungen: $\vec{a}_i^{\,T} \vec{x} \le b_i : \vec{a}_i^{\,T} \vec{x} + u_i = b_i$ bzw. $\vec{a}_i^{\,T} \vec{x} \ge b_i : \vec{a}_i^{\,T} \vec{x} - u_i = b_i$ mit $u_i \ge 0$
   d. $\vec{b} \ge 0$, bei $\vec{b} < 0$ Multiplikation mit (-1)
   e. zu jeder Zeile und Spalte existieren eine Variable, die nur in dieser Zeile und Spalte einmal auftritt und den Koeffizienten $(+1)$ hat.

   $$A^* \cdot \vec{x}_{NB} + E \cdot \vec{x}_B = \vec{b}^{\,*} \qquad \begin{aligned} \vec{x}_{NB} &= \text{Nichtbasisvariablen} \\ \vec{x}_B &= \text{Basisvariablen} \end{aligned} \qquad \Rightarrow \quad \vec{x}_B = \vec{b}^{\,*}$$

2. $ZBL \to ZBL$ mit *AUSTAUSCH*-Verfahren

   $$NPE = \frac{1}{APE} \quad NPZ = \frac{APZ}{APE} \quad NPS = -\frac{APS}{APE} \quad NE = AE - \frac{APZ \cdot APS}{APE}$$

3. Optimalitätskriterium (für alle Formkoeffizienten ≥ 0)
   Auswahl des Pivotelements: - kleinster Formkoeffizient
   - kleinster Quotient $Q = \vec{b} / PS$, nur für $PS > 0$